Solution détaillée:

Exercice 1:

1. a) On a : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{EF}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\wedge\vec{EF}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{EF}$ ne sont pas colinéaires

donc (D) ne passe pas par E.

b) Soit (P) le plan d'équation x – z + 3 = 0 ,

E(-2, 0, 1) et -2 – 1 + 1 = 0 donc $E\in(P)$

Pour tout réel α, $M(-1+\alpha,2\alpha,2+\alpha)\in(D)$ et $(-1+\alpha)-(2+\alpha)+3=0$

Donc $M\in(P)$.

Ainsi , (P) : x – z + 3 = 0 est le plan passant par E et contenant la droite (D).

2. a) On a : I(-3, -1, 0) , la distance de I à la droite (D) est $d(I,D)=\dfrac{\left\|\vec{u}\wedge\vec{FI}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{FI}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\wedge\vec{EI}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$. Donc $d(I,D)=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}$.

D'autre part $IF=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$.

Ainsi , (D) est la tangente au cercle (C) au point F.

Par suite, la droite (D) est tangente au cercle (C) au point F(-2, -2, 1).

b) $IE=\sqrt{(-2+3)^2+(0+1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$ donc $E\in(C)$

G appartient à la droite (D) équivaut à il existe un réel α tel que

$\vec{FG}=\alpha\vec{u}$ donc $\begin{cases}x_G+2=\alpha\\y_G+2=2\alpha\\z_G-1=\alpha\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_G=\alpha-2\\y_G=2\alpha-2\\z_G=\alpha+1\end{cases}$ donc $G(\alpha-2,2\alpha-2,\alpha+1)$

$\vec{GE}\begin{pmatrix}-\alpha\\2-2\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}$ et $\vec{IE}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\vec{GE}.\vec{IE}=-\alpha+2-2\alpha-\alpha=-4\alpha+2$

(GE) est tangente à (C) $\Leftrightarrow\vec{GE}\perp\vec{IE}\Leftrightarrow\vec{GE}.\vec{IE}=0\Leftrightarrow-4\alpha+2=0\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Donc $G\left(-\dfrac{3}{2},-1,\dfrac{3}{2}\right)$.

c) Dans le plan (P),

- la droite (D) est tangente au cercle (C) au point F et G est un point de (D) donc $\overrightarrow{GF} \perp \overrightarrow{IF}$ donc FGI est un triangle rectangle en F
- (GE) est tangente à (C) en G $\Leftrightarrow \overrightarrow{GE} \perp \overrightarrow{IE}$ donc GEI est un triangle rectangle en E.

Par suite, E et F appartiennent au cercle (C ') du plan de diamètre [GI] . Le centre de (C') est donc J milieu de [GI] avec $J\left(-\frac{9}{4},-1,\frac{3}{4}\right)$.

3. a) On a $E(-2,0,1)$ et $2^2+0^2+1^2+4(t-3)+2t=6t-7$ donc E est un point de (S_t).

b) Pour tout réel t,

$$x^2+y^2+z^2-2(t-3)x+2y+2tz=6t-7$$
$$\Leftrightarrow \left[x-(t-3)\right]^2-(t-3)^2+(y+1)^2-1+(z+t)^2-t^2=6t-7$$
$$\Leftrightarrow \left[x-(t-3)\right]^2+(y+1)^2+(z+t)^2-2t^2+6t-10=6t-7$$
$$\Leftrightarrow \left[x-(t-3)\right]^2+(y+1)^2+(z+t)^2=2t^2+3$$

Donc (S_t) est une sphère de centre $N(t-3,-1,-t)$ et rayon $\sqrt{2t^2+3}$.

c) $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P) , $\overrightarrow{IN}=t\,\overrightarrow{n}$ donc $(IN)\perp P$ d'où I est le projeté orthogonal de N sur le plan (P).

b) $\det\left(\overrightarrow{IN},\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IF}\right)=\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -t & 1 & 1 \end{vmatrix}=t\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=2t+2t=4t$.

c) Soit V le volume du tétraèdre FINE ,

$$V=2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IF}\right)\right|=2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}|4t|=2 \Leftrightarrow |t|=3 \Leftrightarrow t=3 \text{ ou } t=-3$$

donc $N(-6,-1,3)$ ou $N(0,-1,-3)$.

Exercice 2:

1.a) $p(B|A)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_8^3}=\frac{5}{56}$; $p(A\cap B)=p(A)\times p(B|A)=\frac{1}{3}.\frac{5}{56}=\frac{5}{168}$.

b) $p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)=\frac{5}{168}+p(\overline{A})\times p(B|\overline{A})=\frac{5}{168}+\frac{2}{3}\times\frac{C_4^3}{C_8^3}=\frac{5}{168}+\frac{8}{168}=\frac{13}{168}$.

2. a) $p(C)=p(A\cap C)+p(\overline{A}\cap C)=\frac{1}{3}\times\frac{C_5^3}{C_8^3}+\frac{2}{3}\times\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{25}{84}$.

b) $p\left(\overline{A}|C\right)=\dfrac{p\left(\overline{A}\cap C\right)}{p(C)}=\dfrac{\frac{40}{168}}{\frac{25}{84}}=\dfrac{4}{5}$.

3.a) Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

$p(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{C_7^3}{C_8^3}+\frac{2}{3}\times\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{75}{168}$; $p(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{C_7^2\times C_1^1}{C_8^3}+\frac{2}{3}\times\frac{C_6^2\times C_2^1}{C_8^3}=\frac{81}{168}$;

$p(X=2)=\frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times\frac{C_6^1\times C_2^2}{C_8^3}=\frac{12}{168}$.

$p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=1$.

L'espérance mathématiques de X est

$E(X)=0\times p(X=0)+1\times p(X=1)+2\times p(X=2)=\frac{5}{8}$.

b) En répétant 160 fois , on estimer le nombre de boules vertes tirées à $\frac{5}{8}\times 160=100$.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x.e^{2x-1}$.

1. a) Pour tout réel x, $f'(x)=e^{2x-1}+2x.e^{2x-1}=(2x+1).e^{2x-1}$

   D'où $f'(x)-2f(x)=(2x+1)e^{2x-1}-2xe^{2x-1}=e^{2x-1}$ donc f est une solution de $y'-2y=e^{2x-1}$.

   b) g est une solution de (E) équivaut à $(g-f)$ est solution de $y'-2y=0$ donc pour tout réel x, $g(x)-f(x)=ke^{2x}$, $k\in\mathbb{R}$, d'où $g(x)=f(x)+ke^{2x}=xe^{2x-1}+ke^{2x}$, $k\in\mathbb{R}$.

   $g(0)=\frac{1}{2e}\Leftrightarrow k=\frac{1}{2e}$.

   Ainsi , pour tout réel x, $g(x)=xe^{2x-1}+\frac{1}{2e}e^{2x}=xe^{2x-1}+\frac{1}{2}e^{2x-1}=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x-1}$.

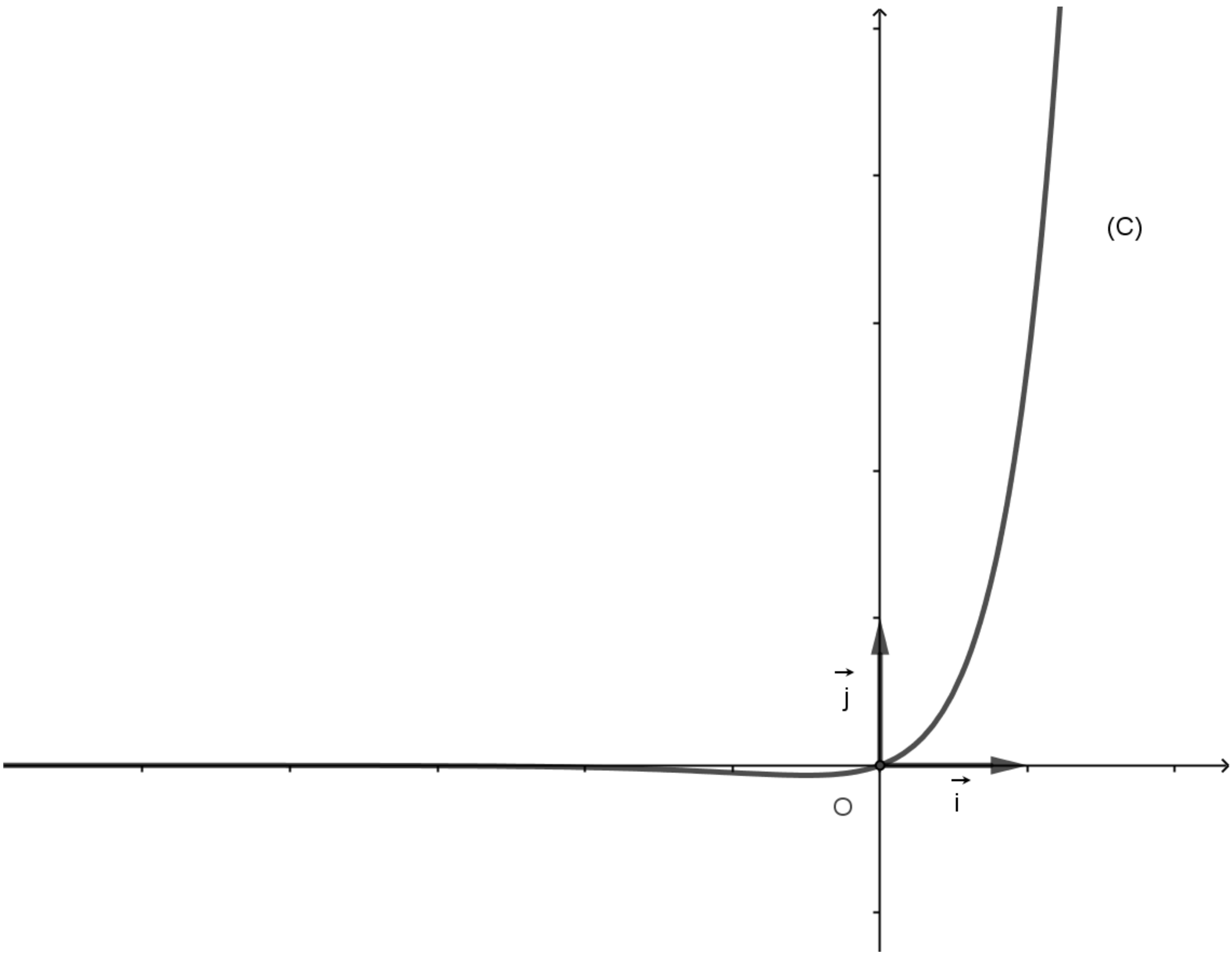
2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x.e^{2x-1}=+\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{2x}.\frac{1}{e}=0$

   b) $f'(x)=0\Leftrightarrow(2x+1).e^{2x-1}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{e^{-2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

a)



3. a) $I_0 = \int_0^2 e^{2x-1}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^2 = \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{e^4-1}{2e}$.

b) $\int_0^2 f'(x)dx = \int_0^2 (2x+1)e^{2x-1}dx = 2\int_0^2 xe^{2x-1}dx + \int_0^2 e^{2x-1}dx = I_0 + 2I_1$

c) On a : $\int_0^2 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_0^2 = f(2) - f(0) = 2e^3$, il en résulte que

$$2I_1 = 2e^3 - I_0 = 2e^3 - \frac{e^4-1}{2e} = \frac{3e^4+1}{2e} \quad \text{d'où} \quad I_1 = \frac{3e^4+1}{4e}.$$

b) F est continue et positive sur [0, 2] donc I_1 est l'aire en unités d'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , la droite des abscisses , la droite des ordonnées et la droite d'équation x = 2.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a) $0 \le x \le 2 \Leftrightarrow -1 \le 2x-1 \le 3 \Leftrightarrow e^{-1} \le e^{2x-1} \le e^3 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \le e^{2x-1} \le e^3$

Comme $x^n \ge 0$ alors $\frac{1}{e}x^n \le x^n e^{2x-1} \le e^3 x^n$.

b) Pour tout x de [0, 2], $x^n e^{2x-1} \ge \frac{1}{e}x^n$ donc $\int_0^2 x^n e^{2x-1}dx \ge \frac{1}{e}\int_0^2 x^n dx$.

Or $\int_0^2 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1}$, il en résulte : $I_n \ge \frac{1}{e}\frac{2^{n+1}}{(n+1)}$.

5. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)$.

a) Pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}\right) = \ln\left(2^{n+1}\right) - \ln(n+1) = (n+1)\ln 2 - \ln(n+1)$$

$$= (n+1)\left[\ln 2 - \frac{\ln(n+1)}{n+1}\right].$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$

$\ln 2 > 0$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\left[\ln 2 - \frac{\ln(n+1)}{n+1}\right] = +\infty$.

c) Pour tout entier n > 0, $I_n \ge \frac{1}{e}\frac{2^{n+1}}{(n+1)}$ donc $I_n \ge \frac{1}{e}e^{\ln\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)}\right)}$ donc $I_n \ge \frac{1}{e}e^{u_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e}e^{u_n} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

<u>Corrigé 4 :</u>

1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_θ):
$iz^2 + (2-i)e^{i\theta}z - (1+i)e^{2i\theta} = 0$.

a) $i\left(ie^{i\theta}\right)^2+(2-i)e^{i\theta}\left(ie^{i\theta}\right)-(1+i)e^{2i\theta}=-ie^{2i\theta}+(2i+1)e^{2i\theta}-(1+i)e^{2i\theta}=(-i+2i+1-1-i)e^{2i\theta}=0$
donc $ie^{i\theta}$ est solution de $\left(E_\theta\right)$

b) L'autre solution z'' de (E_θ) vérifie : $ie^{i\theta}\,z''=-\dfrac{(1+i)e^{2i\theta}}{i}$ donc

$z''=-\dfrac{1+i}{i}e^{i\theta}=(1+i)e^{i\theta}$

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soient les points A, B , M , M_1 et M_2 d'affixes respectives
$z_A=1$, $z_B=i$, $z=e^{i\theta}$, $z_1=ie^{i\theta}$ et $z_2=(1+i)e^{i\theta}$.

2. a) On a : $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM_1}}}{z_{\overrightarrow{OM}}}=\dfrac{z_1}{z}=\dfrac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}=i$ donc $\overrightarrow{OM_1}\perp\overrightarrow{OM}$

et $\left|\dfrac{z_1}{z}\right|=|i|\Leftrightarrow\dfrac{|z_1|}{|z|}=1\Leftrightarrow\dfrac{OM_1}{OM}=1\Leftrightarrow OM_1=OM$. Donc OMM_1 est un triangle isocèle et rectangle en O.

b) $z_2=(1+i)e^{i\theta}=e^{i\theta}+ie^{i\theta}$ donc $\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM}$ donc OMM_2M_1 est un parallélogramme. Or OMM_1 est un triangle isocèle et rectangle en O, donc OMM_2M_1 est un carré.

c) On note I le centre du carré OMM_2M_1 et J le symétrique de A par rapport I.

I est milieu de $[OM_2]$ donc $z_I=\dfrac{z_2}{2}=\dfrac{(1+i)}{2}e^{i\theta}$.

I milieu de [AJ] donc $z_I=\dfrac{z_A+z_J}{2}$ donc $z_J=2z_I-z_A=(1+i)e^{i\theta}-1$.

3. a) $\dfrac{-ie^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-i}=\dfrac{-i(\cos\theta+i\sin\theta)+1}{\cos\theta+i\sin\theta-i}=\dfrac{(\sin\theta+1)-i\cos\theta}{\cos\theta+i(\sin\theta-1)}=\dfrac{\left[(\sin\theta+1)-i\cos\theta\right]\left[\cos\theta-i(\sin\theta-1)\right]}{\cos^2\theta+(\sin\theta-1)^2}$

$$=\frac{(\sin\theta+1)\cos\theta-(\sin\theta-1)\cos\theta-i\left[(\sin\theta+1)(\sin\theta-1)+\cos^2\theta\right]}{2-2\sin\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta}{2-2\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

b) $\dfrac{-ie^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-i}=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\Leftrightarrow\dfrac{z_{\overrightarrow{MJ}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{JM}$ sont colinéaires donc les points B, J et M sont alignés.

4. On pose $z=a+ib$, où a et b sont réels.

a) $z_{\overrightarrow{BJ}} = (1+i)(a+ib)-1-i = a-b-1+i(a+b-1)$ donc $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} a-b-1 \\ a_1+a_2-1 \end{pmatrix}$

$z_{\overrightarrow{AJ}} = (1+i)(a+ib)-2 = (a-b-2)+i(a+b)$ donc $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix} a-b-2 \\ a+b \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BJ}\perp\overrightarrow{AJ} \quad = (a-b-1)(a-b-2)+(a+b)(a+b-1) = (a-b)^2-3(a-b)+2+(a+b)^2-a-b$

$= 2(a^2+b^2)-4a+2b+2$

b) Si (BJ) et (AJ) sont perpendiculaires alors $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont orthogonaux donc $2(a^2+b^2)-4a+2b+2=0$.

Remarquons que $|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}=1 \Leftrightarrow {a_1}^2+{a_2}^2=1$, il en résulte :

Si (BJ) et (AJ) sont perpendiculaires alors $-4a+2b+4=0$ donc b = 2a – 2.

D'où M(a, b) appartient à la droite Δ d'équation y = 2x – 2.

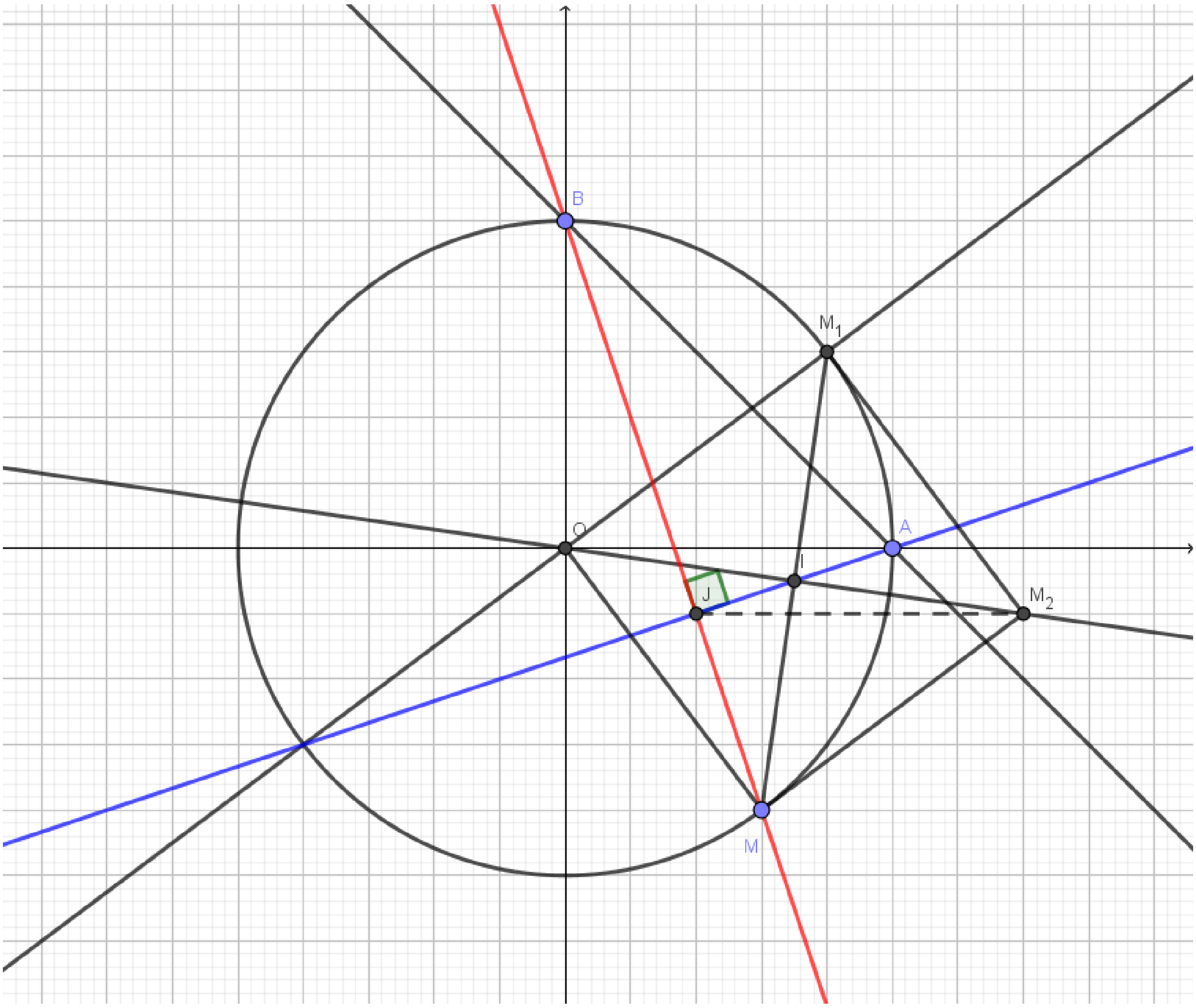
c) M appartient au cercle trigonométrique de centre O et à la droite Δ :y = 2x-2.

On a : $\begin{cases} b=2a-2 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a-2 \\ a^2+(2a-2)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a-2 \\ 5a^2-8a+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=\frac{3}{5} \\ b=-\frac{4}{5} \end{cases}$.

Comme $\left[-\frac{\pi}{2},0\right[$ alors $z\neq 1$ donc $z=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$.

L'aire du triangle ABM est $S=\frac{1}{2}AJ\times BM$.

Or $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix}$ donc $S=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{82}}{5}=\frac{\sqrt{410}}{50}$.


B
M
1
O
A
I
J
M
2
M