

Thèmes abordés :

- ✓ Racines nièmes d'un nombre complexe.
- ✓ Forme exponentielle.
- ✓ Equations à coefficients complexes.
- ✓ Un peu de géométrie.

Exercice 1

1. Vérifier que $-7 + 24i = (2 + i)^4$.
2. Donner les racines quatrièmes de l'unité.
3. En déduire les solutions de l'équation (E) : $z^4 = -7 + 24i$. On les donnera sous la forme algébrique.

Exercice 2

Soit α un réel de l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

1. a. Donner la forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :
 $a = 1 + i \cdot \tan \alpha$ et $b = 1 - i \cdot \tan \alpha$.
- b. En déduire la forme exponentielle de $c = \frac{a}{b}$.
- c. Donner les racines cubiques de c .
2. Soit l'équation (E) : $b(1 + i \cdot z)^3 = a(1 - z)^3$.
 - a. Vérifier que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $\begin{cases} u^3 = c \\ u = \frac{1 + i \cdot z}{1 - z} \end{cases}$
 - b. Résoudre alors l'équation (E) dans \mathbb{C} . On notera les solutions par $z_k, k \in \{0, 1, 2\}$
 - c. Donner la forme exponentielle des z_k lorsque $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 3

1. Soit α un réel et l'équation (E_α) : $z^2 - (1 + i)e^{i\alpha}z + ie^{i2\alpha} = 0$.
 - a. Développer $(1 - i)^2$.
 - b. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_α). On notera a et b les solutions.
 - c. Montrer que les points O ; $A(a)$ et $B(b)$ sont les sommets d'un triangle rectangle et isocèle.
2. Soit l'équation (E'_α) : $z^3 - 2(1 + i)e^{i\alpha}z^2 + 3ie^{i2\alpha}z + (1 - i)e^{i3\alpha} = 0$.
 - a. Vérifier que $c = (1 + i)e^{i\alpha}$ est solution de (E'_α).
 - b. Résoudre alors (E'_α) dans \mathbb{C} .
3. Soit C le point d'affixe c .
 - a. Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un carré.
 - b. Faire une figure pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 4 (session principale bac Sc 2011)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A et B d'affixes

respectives $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b .

b) Vérifier que $b^2 = a$.

2) Soit C le point d'affixe $c = a + b$.

a) Placer les points A , B et C .

b) Vérifier que $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On considère dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^2 + z - c = 0$.

a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E). Montrer que $d = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$.

c) Placer alors le point D d'affixe d .

Exercice 5 (session principale bac Tech 2011)

1) Montrer que $ie^{i\frac{\pi}{6}} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^2$.

2) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation (E): $z^2 - 2(e^{i\frac{\pi}{12}})z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A , B et

C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$; $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.

b) Placer les points A , B et C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

c) Calculer l'aire du losange $OACB$.

Exercice 6 (session de contrôle bac Tech 2012)

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (4 + e^{i\theta})z + 2(2 + e^{i\theta}) = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points I et

M d'affixes respectives 2 et $2 + e^{i\theta}$.

Montrer que le point M appartient au cercle (Γ) de centre I et de rayon 1 .

3) Soit A le point d'affixe $\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Vérifier que A appartient au cercle (Γ) . Construire le point A .

b) Montrer que le triangle OAI est rectangle en A .

c) En déduire la valeur de θ pour laquelle le triangle OAM est rectangle en A .