Lycée 2 Mars 34	**DEVOIR DE SYNTHESE N°2**		**Mme NGUER HEND**
Ksar Hellal	**$4^{ème}$ Sc Expérimentales 1**	**durée 3h**	**2011 / 2012**

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux :

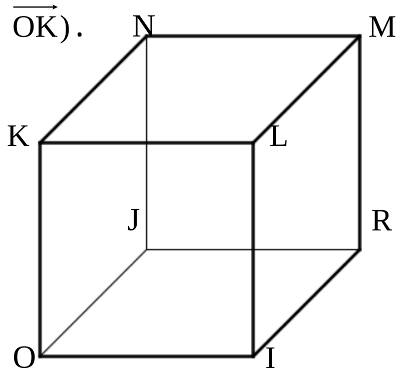
1) Soit ABC est un triangle équilatéral de côté a ; alors $\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\right) = a^2$.

2) Soient a et b deux réels, toute fonction continue sur $[a\ ,\ b]$ telle que $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ est une fonction positive sur $[a\ ,\ b]$.

3) Soit la fonction F définie sur IR par : $F(x) = \int_1^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt$, alors F est croissante sur IR.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.
Soit un cube OIRJKLMN ci-contre représenté et soient les points A et B telles que $\overrightarrow{KA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{IB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IL}$



1) a) Montrer que $A\left(0\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ 1\right)$ et $B\left(1\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{3}\right)$.

   b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

   c) Montrer que l'aire du triangle OAB est égale à $\frac{11}{18}$.

   d) Calculer le volume du tétraèdre $OABJ$ et en déduire la distance du point J au plan (OAB).

2) Montrer que le point $H(3\ ,\ 0\ ,\ 1)$ appartient au plan (OAB).

3) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par H et perpendiculaire au plan (OAB).

4) Soit S l'ensemble des points $M(x\ ,\ y\ ,\ z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2-2x+18y-14z+127=0$

   a) Montrer que S est une sphère dont-on précisera le centre ω et le rayon R.

   b) Vérifier que ω appartient à Δ et caractériser $S \cap (OAB)$.

Exercice 3

Soient les suites (U_n) **et** (V_n) définies sur IN par $U_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ et $V_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,dx$.

1) a) Calculer U_1.

   b) Montrer que $\forall n \in \mathrm{IN}$ **;** $V_n + nU_n = n$.

   c) Calculer V_1.

2) a) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.

   b) En déduire que $\forall n \in \mathrm{IN}$ on a : $\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 1$.

   c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $\frac{1}{x+1} \leq 1$ et que $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

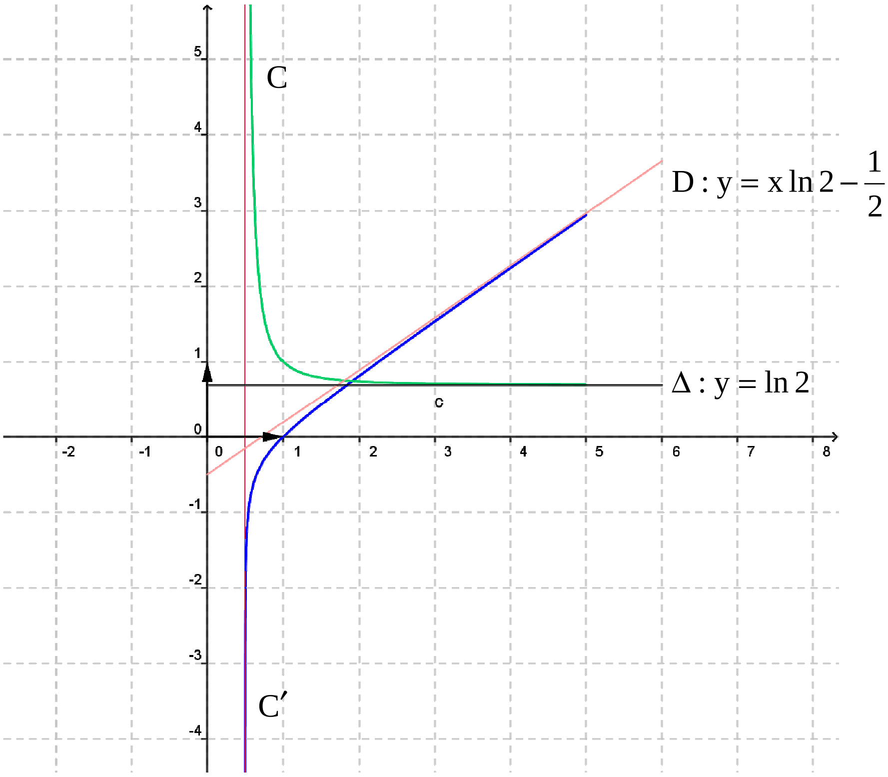
4) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $V_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

   b) En déduire que : $\ln 2 - \frac{1}{n+1} \leq V_n \leq \ln 2$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice 4

On représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C et C' d'une fonction f définie dérivable sur $\left]\frac{1}{2}\ ,+\infty\right[$ et de sa fonction dérivée u.

Les droites $\Delta : y = \ln 2$; $D : y = x\ln 2 - \frac{1}{2}$ et $D' : x = \frac{1}{2}$ sont des asymptotes.



A/

1) Reconnaître la courbe de f et celle de u.
2) Déterminer $f(1)$, $u(1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.
3) Montrer que $\forall x \in \left]\frac{1}{2}\ ,+\infty\right[$ on a : $f(x) = \int_1^x u(t)\,dt$ et donner les variations de f.

B/

On donne $\forall x \in \left]\frac{1}{2}\ ,+\infty\right[$ on a : $f(x) = x\ln\left(\frac{2x-1}{x}\right)$ et $u(x) = \frac{1}{2x-1} + \ln\left(\frac{2x-1}{x}\right)$.

1) Montrer que $\forall x \in \left]\frac{1}{2}\ ,+\infty\right[$ $f'(x) = u(x)$
2) Montrer que $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} u(x) = +\infty$.
3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty^+} f(x) - x\ln 2 = -\frac{1}{2}$.Que peut-on conclure ?
4) Soit g la fonction définie sur $]0\ ,+\infty[$ par : $g(x) = \ln x - x + 1$.
   a) Donner le sens de variations de g et calculer $g(1)$.
   b) En déduire que $\forall x \in]0\ ,+\infty[$ on a : $\ln x \le x - 1$
   c) Montrer que $\forall x \in \left]\frac{1}{2}\ ,+\infty\right[$ on a : $f(x) - x\ln x + \frac{1}{2} < 0$.
   d) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.