Résumé de cours : Formes indéterminées-Valeurs intermédiaires.

Les formes indéterminées sont :

Formes indéterminées		
$\overbrace{(\quad)}^{0}\times\overbrace{(\quad)}^{\pm\infty}$	$\dfrac{\overbrace{(\quad)}^{\pm\infty}}{\underbrace{(\quad)}_{\pm\infty}}$	$\dfrac{\overbrace{(\quad)}^{0}}{\underbrace{(\quad)}_{0}}$
$\overbrace{(\quad)}^{+\infty}+\overbrace{(\quad)}^{-\infty}$		

Attention :

Dans un calcul de limite il est indispensable, avant de chercher à modifier une écriture, de s'assurer que les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure directement.
Pour tous qui suivent, nous supposerons que cette étape franchie.

Indéterminations levées par le cours

Les limites suivantes sont fournies dans le cours.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Conséquences :

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}=a$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=\dfrac{a}{b}$ avec $b\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(ax)}{x}=a$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(ax)}{\tan(bx)}=\dfrac{a}{b}$ avec $b\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0$,

Théorème des gendarmes

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a, ou dont a est une borne de I (a réel ou infini). Si f, g et h sont trois fonctions définies sur I telles que, pour tout réel x de I, $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ et si les fonctions f et h ont une limite réelle commune ℓ en a, alors la fonction g a une limite réelle en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$

Quelques techniques usuelles pour lever des indéterminations

Pour $\overbrace{(\quad)}^{0}\times\overbrace{(\quad)}^{\pm\infty}$
Développer l'expression.

Pour $\dfrac{\overbrace{(\quad)}^{\pm\infty}}{\underbrace{(\quad)}_{\pm\infty}}$
Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.

Pour $\dfrac{\overbrace{(\quad)}^{0}}{\underbrace{(\quad)}_{0}}$ avec x tend vers $x_0\in\mathbb{R}$

- **Mettre en facteur $(x-x_0)$ en haut et en bas.**
- **On fait disparaître le radical.**

Pour $\overbrace{(\quad)}^{+\infty}+\overbrace{(\quad)}^{-\infty}$

- **Mettre le plus fort en facteur.**
- **On fait disparaître le radical là où il pose problème.** :

Théorème

$$\underbrace{x\xrightarrow{f} f(x)\xrightarrow{g} g(f(x))}_{g\circ f}$$ a, b, c sont des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(x)=c$, alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=c$

Théorème de comparaison

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a, ou dont a est une borne de I (a réel ou infini). Soient f et g deux fonctions définies sur I telles que, pour tout réel x de I, $f(x)\leqslant g(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$

Nombres dérivés

Les limites suivantes fournissent toutes un nombre dérivé. ($x_0 \in \mathbb{R}$).

- Si f est dérivable en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.
- Si f est dérivable en x_0 et si $f(x_0)=0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{x-x_0} = f'(x_0)$.
- Si f, g sont dérivables en x_0 et si $g'(x_0) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.
- Si f, g sont dérivables en x_0 et si $f(x_0)=g(x_0)=0$ et $g'(x_0)\neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Comment calculer une limite à l'infini ?

✪ Si on obtient une forme indéterminée pour :

1. **une fonction polynôme de degré n :**
   Chercher la limite de son terme du plus haut degré.
2. **une fonction rationnelle :**
   Chercher la limite du rapport de ses termes du plus haut degré.(après simplification)
3. **une fonction irrationnelle :**
   Multiplier et diviser par l'expression conjuguée.

Comment calculer des limites aux points qui annulent le dénominateur ?

Calculer la valeur prise par le numérateur.

✍ Si elle est différente de 0, la limite est infinie. Étudier alors le signe du dénominateur.

✍ Si elle est nulle :

- factoriser numérateur et dénominateur puis simplifier.
  OU
- penser à utiliser la dérivation

Autres méthodes utilisées :

✪ Théorèmes de comparaison.
✪ Limite d'une fonction composée.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soient a et b deux éléments de I tels que $a<b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel $c\in[a;b]$ tel que $f(c)=k$.
En particulier, si $f(a)\times f(b)=0$,il existe **au moins** un réel $c\in]a;b[$ tel que $f(c)=0$.

Théorème de la solution unique

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soient a et b deux éléments de I tels que $a<b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** réel $c\in[a;b]$ tel que $f(c)=k$.
En particulier, si $f(a)\times f(b)=0$,il existe **un unique** un réel $c\in]a;b[$ tel que $f(c)=0$.

Théorème de signe d'une fonction continue sur un intervalle

✍ Une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule pas garde un signe constant.

✍ Si f est une fonction continue strictement croissante sur $[a,b]$ avec $a<b$ et s'il existe un $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$ alors on a : si $a\leqslant x<c$, $f(x)<0$ et si $c<x\leqslant b$, $f(x)>0$.

✍ Si f est une fonction continue strictement décroissante sur $[a,b]$ avec $a<b$ et s'il existe un $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$ alors on a : si $a\leqslant x<c$, $f(x)>0$ et si $c<x\leqslant b$, $f(x)<0$.

✍ Si f est continue croissante sur $[a,b]$ telle que $f(a)\geq 0$ alors : $\forall x\in[a,b]$, on a : $f(x)\geq 0$.

✍ Si f est continue croissante sur $[a,b]$ telle que $f(b)\leqslant 0$ alors : $\forall x\in[a,b]$, on a : $f(x)\leqslant 0$.

✍ Si f est continue décroissante sur $[a,b]$ telle que $f(b)\geq 0$ alors : $\forall x\in[a,b]$, on a : $f(x)\geq 0$.

✍ Si f est continue décroissante sur $[a,b]$ telle que $f(a)\leqslant 0$ alors : $\forall x\in[a,b]$, on a : $f(x)\leqslant 0$.

Fin.